Проектирование протоколов
Лекция № 10 курса
«Алгоритмы для Интернета»

Юрий Лифшиц*

30 ноября 2006 г.

Содержание

1. Эгоистичные агенты и кратчайший путь

Введение

Представим себе, что мы решили совершить путешествие, в течение которого будет много перелетов, и нам нужно доехать как можно быстрее. Туристические агентства объявляют, куда они могут нас перевезти и за какое время, но они не обязательно говорят правду. Естественно, что им может быть выгодно сообщить, что они довезут мгновенно, поскольку они хотят заключить контракт. Получается некий аукцион: каждый агент объявляет время проезда, а путешественник выбирает оптимальный (кратчайший) маршрут.

Агенты могут нас обманывать, то есть говорить, что довезут быстрее, чем на самом деле могут. Нам необходимо сразу принять решение, при этом нет возможности проверить достоверность объявленных значений. Можно заставить агентов говорить правду, используя один рычаг влияния — оплату контракта, которая будет зависеть от предложенных участниками значений. Например, если агент говорит, что очень быстро довезет нас, мы можем дать ему за это мало денег — зачем мы будем платить много, если у него на нас меньше затрат? Таким образом, требуется найти такую зависимость оплаты работы от заявленных сроков исполнения, которая заставит всех объявлять истинное время.

Кратчайший путь как игра

Рассмотрим двусвязный граф. Путешественник стартует в вершине A и хочет попасть в вершину B. В таком графе никакое ребро не является критичным, при выкидывании любого ребра все равно

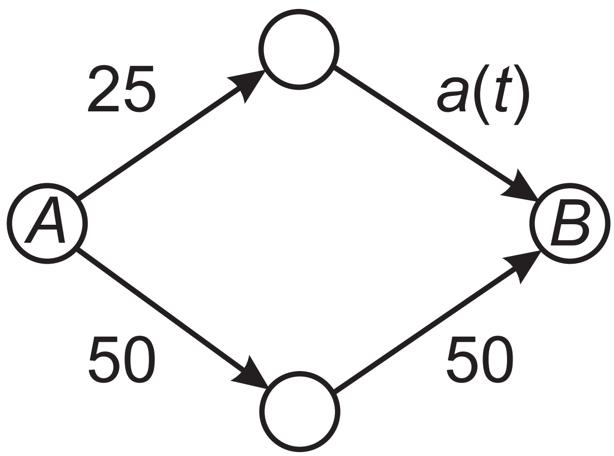
*Законспектировала Белослудцева Оксана.

будет путь от вершины A до B. На каждом ребре «сидит» *агент*, который управляет данным ребром. Путешественник хочет узнать время проезда у агентов и проехать самым быстрым способом от A до B. Каждый агент знает истинное время проезда t_i по своему ребру и независимо от других объявляет некоторое время провоза $a_i = a_i(t_i)$. Путешественник выбирает кратчайший путь на основе объявленных времен и за проезд по каждому вошедшему в путь («активному») ребру i платит $p_i(a_1, \dots, a_n)$. Если ребро не вошло в путь («пассивное»), то данному агенту путешественник ничего не платит (но у такого агента и затраты равны 0, поскольку он не участвует в перевозке). Собственные затраты на перевозку агента i будем считать равными t_i, поэтому реальный выигрыш активного агента составит $p_i - t_i$.

Агенты действуют рационально и эгоистично, пытаясь увеличить свой выигрыш. Цель путешественника — определить правила оплаты $p_i(\cdot)$ так, чтобы каждому агенту было выгодно (с точки зрения его функции выигрыша) говорить правду. Иначе говоря, для каждого агента попытка соврать при фиксированном выборе остальных участников не должна приводить к увеличению его выигрыша. Задачи выбора функций оплаты изучаются в разделе *Mechanism Design*, а способы их вычисления — в разделе *Algorithmic Mechanism Design*.

Пусть все участники, кроме одного, сказали правду. Как надо платить последнему участнику, чтобы он сказал правду?

Рассмотрим граф, в котором 4 ребра. Объявленные стоимости 25, 50 и 50 соответствуют действительности; последний агент объявляет стоимость a, его истинная цена равна t.



Легко понять, что если $a > 75$, то выигрыш последнего агента — 0. Если $a < 75$, то он составит $p - t$. Вариант $a = 75$ для простоты отнесем к первому случаю.

Заметим, что всегда можно гарантировать себе нулевой выигрыш, сказав, что время провоза очень велико. Тогда ребро не будет выбрано, но и потрачено ничего не будет.

Сколько же необходимо платить последнему агенту, чтобы наиболее выигрышной стратегией для него было объявление реальной стоимости? Как уже отмечалось, если $a > 75$, то разумно платить 0 — ведь за что платить агенту, который сам объявляет себя неконкурентоспособным? Теперь рассмотрим остальные возможные случаи.

Пусть участник объявил, скажем, $a = 60$, и мы его выбрали. Здесь тоже возможны два случая. Либо t было больши́м, например, 80, и агент получил контракт, который не должен был получить, так как содержащий его ребро путь на самом деле оказался длиннее. В этом случае надо как-то наказать агента. Или, наоборот, на самом деле $t = 30$. В первом случае он получит $p(60) - 80$ - и, скорее всего, потеряет деньги, потому что вряд ли мы ему заплатим 80. Он останется в минусе, хотя всегда мог гарантировать себе нулевой выигрыш, если бы сказал правду. Нужно платить в этом случае меньше, чем его реальная работа, то есть $p(60)$ должно быть меньше 80. Мы не знаем истинной стоимости для данного агента, а знаем только объявленную цену. Это означает, что на самом деле $p(60)$ должно быть не больше 75. Иначе если мы будем платить хотя бы 76, то тот, у кого реальное время, например, 75.5, объявит 60, мы его выберем и проиграем по времени, а он останется в плюсе. И вообще, для любого $a < 75$ величина $p(a)$ не должна превышать 75. Теперь посмотрим, что будет, если мы будем платить меньше, скажем, 60. Тогда представим, что провозят на самом деле за 65. Агенту будет невыгодно получать этот контракт, поскольку тогда он останется в минусе. Значит, он соврет и завысит цену, а мы поедем по более длинному пути.

Таким образом, за проезд по данному ребру нужно всегда платить ровно 75! Тогда те, кто возят за меньшее время, объявят свою истинную цену, чтобы мы их выбрали и они получили прибыль; а те, кто возит дольше, не будут обманывать и занижать цену, ведь 75 не покроет их издержки. Единственный вариант, при котором агент может соврать, — это объявить цену 60 при реальной стоимости 65. Но от этого выигрыш не изменится: в обоих случаях он будет составлять $p(a) - t = 75 - 65$.

Общее решение

Когда все цены объявлены, функция оплаты за активное ребро $p_k(a_1, ..., a_n)$ выражается в виде разности величин $D_{AB}^{a_k=\infty}(\bar{a})$ и $D_{AB}^{a_k=0}(\bar{a})$, где $D_{AB}^{a_k=\infty}(\bar{a})$ — длина минимального пути в предположении $a_k = \infty$, а $D_{AB}^{a_k=0}(\bar{a})$ — в предположении $a_k = 0$.

Убедимся, что эта формула дает тот же результат на рассмотренном примере. Действительно, при подстановке $a = \infty$ минимальным будет нижний путь стоимостью 100. Если же $a = 0$, то верхний путь стоимостью 25 становится минимальным. Значит, искомая разность равна 75.

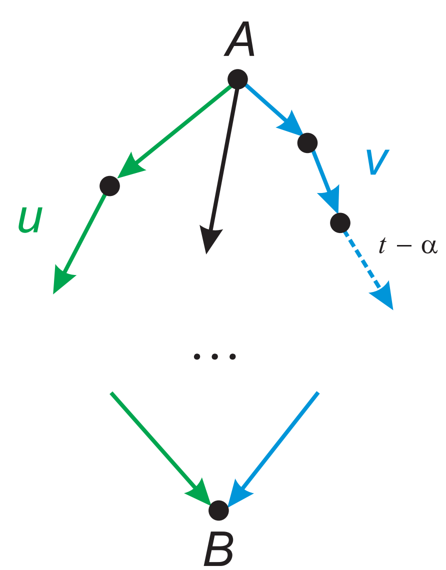
Рассмотрим теперь общий случай. Пусть все агенты объявили свои цены, и минимальный путь выбран. Если стоимость не входящего в путь (пассивного) ребра принять за 0, то содержащий его путь может стать минимальным, в таком случае ребро станет активным. Если пассивное ребро не стало активным даже при нулевой цене, то оно никогда не станет активным (объявлять отрицательную цену правилами запрещено). За такое ребро мы точно платим 0, так как при значениях на этом ребре $a = 0$ и $a = \infty$ мы выбираем другой путь, а значит $D_{AB}^{a_k=\infty}(\bar{a}) = D_{AB}^{a_k=0}(\bar{a})$.

Теперь рассмотрим ребро, которое потенциально может попасть в минимальный путь. Сколько мы за него платим? Если принять его длину за ∞, то мы выберем другой путь. Если же его длина — 0, то содержащий его путь становится кратчайшим. Тогда мы агенту на этом ребре платим пропорционально тому, насколько нулевая цена этого ребра улучшила бы скорость прохождения этого графа. Оказывается, это справедливая цена, которая заставляет при любой реальной стоимости этого ребра говорить правду.

Теорема (честность — лучшая политика). *Зафиксируем ходы всех участников, кроме k-го. Тогда любая попытка соврать k-го агента не принесет ему большего выигрыша, чем честное признание.*

Выигрыш k-го активного участника: $D_{AB}^{a_k=\infty} - D_{AB}^{a_k=0} - t_k$, пассивного — 0. Рассмотрим две ситуации: в одной агент сказал правду, а в другой — соврал. Убедимся, что в первой ситуации он выиграл не меньше, чем во второй.

1 случай. Пусть, сказав правду, агент не получил контракт.



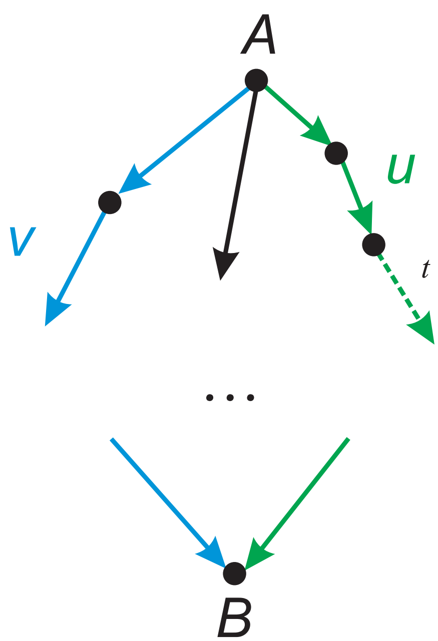
Пусть теперь, сказав неправду, он получил контракт. Новый минимальный путь — правый. Раз это так, то названная цена меньше, чем была. Обозначим цены t и $t - \alpha$ соответственно. Когда агент не получал контракт, его выигрыш был равен 0. Теперь выигрыш равен $D^{a_k=\infty} - D^{a_k=0} - t$. Поймем, может ли разница $D^{a_k=\infty} - D^{a_k=0}$ покрывать расходы t.

Обозначим стоимость левого пути u, правого — v. Значит, раньше его стоимость составляла $v + \alpha$. Известно, что $u < v + \alpha$, иначе говоря, агент соврал на сумму, бо́льшую, чем разница этих путей: $\alpha > u - v$. Поскольку по правилам $t - \alpha \geqslant 0$, то и $t > u - v$. Заметим, что $D^{a_k=\infty} = u$, так как левый путь был минимальным, когда рассматриваемый агент объявлял t.

$D^{a_k=0} = v - t + \alpha$.

Итого, $D^{a_k=\infty} - D^{a_k=0} = u - v + t - \alpha < \alpha + t - \alpha = t$, то есть, объявив ложную стоимость, агент заведомо проиграл!

2 случай. У агента был контракт с самого начала.



Поймем, что его выигрыш в таком случае положителен.

Пусть длина пути с этим ребром равна u. В таком случае при замене t на ∞ станет минимальным какой-то другой путь длины v, которая обязана быть больше u, иначе u не будет минимальным. Если подставить $t = 0$, то наш путь станет еще короче, значит, $D^{a_k=0} = u - t$. Итого, $D^{a_k=\infty} - D^{a_k=0} - t = v - (u - t) - t = v - u \geqslant 0$, поэтому врать так, чтобы не получить контракт, агенту невыгодно. Называть другую цену, оставаясь на минимальном пути, бесполезно: его выигрыш от этого не изменится.

Таким образом, наша функция оплаты создает такую ситуацию, в которой честность является не худшей политикой, чем какое-либо вранье. Координатору это выгодно тем, что если все выскажут свои времена проезда честно, то он действительно выберет кратчайший путь.

Возникает вопрос, как считать функцию оплаты. Здесь возникают некоторые сложности: ведь нам надо узнать минимальный путь, который не проходит через данное ребро, для каждого ребра графа. Получается сложность порядка $nm \log n$ (n — число вершин, m — число ребер). Долгое время выясняли, нельзя ли это сделать как-нибудь для всех ребер одновременно. Удалось придумать такой алгоритм (он работает за $n \log n$).

2. Аукцион Викри, эгоистичные подрядчики и составление расписаний

Аукцион Викри

Вильям Викри придумал новый тип аукционов. В его аукционе победитель — это тот, кто назвал максимальную цену, но платит он по второй объявленной цене. Оказывается, что для такого аукциона честность является лучшей политикой, то есть участнику выгодно говорить, как он на самом деле оценивает тот продукт, который покупает.

Докажем для аукциона Викри теорему «честность — лучшая политика».

Представим, что есть такой параметр, как внутренняя ценность (полезность) товара для каждого покупателя. Например, при покупке завода с целью построить на его месте небоскреб будет одна внутренняя цена, если же планируется использовать завод по назначению, предварительно его модернизировав, то внутренняя цена будет другой. Эти цены для каждого покупателя свои и зависят от того, как он оценивает актив с точки зрения своих возможностей, и того, сколько денег он сможет из него извлечь.

Все участники объявляют некоторую цену. В итоге проигравшие ничего не платят и не получают никакой прибыли, победитель получает t_1 (то, что ему приносит этот актив) и платит $v_2(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Убедимся в том, что при таких условиях выгодно говорить правду в том смысле, что если соврать, то лучше не будет (значение функции выигрыша не увеличится).

Разберем случаи.

Пусть мы сказали правду (t_1) и проиграли аукцион (наша цена не оказалась лучшей). Если мы объявим $a_1 < t_1$, то снова не выиграем. Если объявим $a_1 > t_1$, то мы можем выиграть, и в таком случае заплатим по второй цене. Но вторая цена — это та, которая больше всех остальных, кроме нашей. Значит, в первом случае она выигрывала аукцион, то есть была больше t_1. Это означает, что мы останемся в убытке.

Второй случай: мы выиграли аукцион, сказав правду, и заплатили по второй цене. Раз мы объявили свою реальную цену, вторая объявленная цена не превышает ее, значит, мы остаемся в плюсе. Если, соврав, мы все равно выигрываем аукцион, то ничего не меняется. Если не удалось выиграть аукцион, то мы останемся в нуле, хотя у нас была возможность выиграть.

Распределение заданий

У заказчика есть n заданий. Есть k подрядчиков, и каждый подрядчик знает, сколько времени ему потребуется на выполнение каждого из заданий. Подрядчики объявляют (не обязательно честно) свои условия: сколько времени у них займет выполнение той или иной работы. Заказчик распределяет задания, минимизируя время завершения последнего задания. Подрядчик не может выполнять две работы одновременно. Выигрыш подрядчика равен разнице между оплатой и потраченным временем на выполнение тех заданий, которые ему достались. Какова должна быть стратегия заказчика?

Мы минимизируем время работы дольше всех работающего подрядчика. Трудность еще состоит в том, что даже зная истинное время исполнения, мы не можем построить оптимального распределения заданий (это NP-трудная задача). Поэтому мы будем рассматривать упрощенную версию: будем считать, что задание отправляется к тому, кто объявил наименьшее время его исполнения.

Жадное распределение

На самом деле, это не такая уж плохая стратегия. В случае двух подрядчиков итоговое время исполнения при таком подходе будет не более чем в 2 раза хуже по сравнению с оптимальным.

Например, пусть имеется 100 заданий, один подрядчик делает все работы за 1 единицу времени, а другой — за 2. Согласно жадному алгоритму, мы отправим все работы первому подрядчику, и итоговое время будет 100. Если бы треть работ было отправлено второму исполнителю, то было бы затрачено 67 единиц времени. В этом примере мы проигрываем только в 1.5 раза. Почти в 2 раза можно проиграть, если второй подрядчик выполняет все работы за 1.01. Тогда мы опять поручим все задания первому, а можно было бы разделить задания пополам.

Рассмотрим суммарное время выполнения всех работ. У жадного алгоритма оно минимально. Обозначим минимальную сумму времен выполнения всех работ через t_{opt}. В жадном расписании каждый подрядчик работает не больше, чем t_{opt}, потому что в сумме все вместе работают t_{opt}. В любом другом расписании в сумме подрядчики работают больше, чем t_{opt}, значит, хотя бы один из них работает $\frac{t_{opt}}{2}$. Поэтому время работы — хотя бы $\frac{t_{opt}}{2}$.

Аналогично можно показать, что при k подрядчиках жадное расписание не более чем в k раз проигрывает любому другому.

Стратегия заказчика

Сколько надо платить подрядчикам, чтобы самой выгодной их стратегией было объявить настоящее время работы?

Если подрядчик не получил работу, по-прежнему платим ему 0. С теми, кто получает работу, будем поступать, как в аукционе Викри: платить за исполнение задачи по второму объявленному времени работы (при этом мы используем жадное расписание). Такая оплата приведет к тому, что все будут объявлять правильное время работы.

Зафиксируем отдельно каждое задание (считаем, что у нас теперь только одно): преимущество жадного подхода в том, что все задания независимы. Таким образом, мы каждое задание направляем тому, кто объявит минимальное время его выполнения. Получается аукцион Викри: все объявили, что справятся с заданием за время $a_1, a_2, a_3, \ldots$, мы отправляем задание тому, кто объявил минимальное время, платим ему a_2 (больше, чем он объявил; его собственные издержки равны t_1). Взяв «с минусом» аукцион Викри, получим требуемое утверждение.

3. Общий механизм Викри–Грувса–Кларка (VGC)

Игры с неполной информацией

У каждого участника есть входные данные, которые известны вначале только ему одному. Каждый выбирает свою стратегию, основываясь только на своих данных.

Итак, каждый агент знает свой секретный параметр t_i и объявляет (не обязательно честно) значение a_i из того же множества. Координатор принимает оптимальное решение $o(a_1, \ldots, a_n)$ на основе того, что ему сказали (никак проверить он не может), и производит оплату $p_i(\bar{a}, o)$, зависящую от сделанных объявлений и от его решения. Каждый агент, кроме оплаты от координатора, получает также непосредственный выигрыш от принятого решения $v_i(t_i, o)$.

Каждый игрок меняет только один параметр: свое объявление a_i. Этим объявлением он меняет функцию оплаты координатора и влияние решения координатора на свой непосредственный выигрыш. Агент играет так, чтобы максимизировать сумму выигрыша от решения координатора и оплаты от него $v_i + p_i$. Задача координатора — придумать такую систему компенсаций p_i, чтобы всегда было выгодно говорить правду. Если каждый скажет правду, координатор выберет правильное решение, вычисленное не от $a_1, \dots a_n$, а от настоящих данных $t_1, \dots t_n$. Он хочет подобрать такое решение o, которое максимизирует сумму всех внутренних выигрышей.

Викри в 1961 году начинал этим заниматься, Кларк разработал общую систему понятий, а Грувз доказал общую теорему.

Теорема. *Следующая формула всегда удовлетворяет свойству «честность — лучшая политика», то есть для такой функции оплаты каждому агенту вранье не приносит никакой пользы:*

$$p_i(\bar{a}, o) = \sum_{j \neq i} v_j(t_j, o) + h_i(a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n)$$

Таким образом, после всех объявлений каждый участник получает следующую компенсацию: сумму внутренних выигрышей всех остальных участников плюс что-то, что не зависит от его объявления, а зависит от объявлений всех остальных участников.

Убедимся в том, что формула, полученная в первом примере, — это частный случай данной. В нашем случае o — это путь, который выберет путешественник, $v_i(t_i, o)$ — не что иное, как $-t_i$, а компенсация $p_i(\bar{a}, o) = D^\infty - D^0$. $-D^0$ — это в точности сумма внутренней полезности всех остальных участников: если ребро i принадлежит пути, то когда мы приравниваем его стоимость к нулю, минимальный путь все равно проходит через него, то есть это сумма всех остальных ребер вдоль этого пути, а это и есть $\sum_{j \neq i} v_j(t_j, o)$ (у тех ребер, которые не входят в путь, $v_j = 0$).

Задача

Рассмотрим произвольный (необязательно двусвязный) граф. Разработайте механизм оплаты в задаче о кратчайшем пути, заставляющий агентов делать честные признания.

Итоги

1. Mechanism Design: разработка правил игры с неполной информацией, которые заставят участников быть честными.
2. Два приложения: поиск кратчайшего пути и составление расписаний.
3. Algorithmic Mechanism Design: быстрое вычисление функций оплаты.

Источники

[1] Nissan, Ronen. Algorithmic Mechanism Design
http://iew3.technion.ac.il/~amirr/AMDJ.pdf

[2] Wikipedia. Vickrey-Clarke-Groves
http://en.wikipedia.org/wiki/Vickrey-Clarke-Groves

[3] Страница курса
http://logic.pdmi.ras.ru/~yura/internet.html