# Метод опорных векторов

## Лекция N 7 курса “Алгоритмы для Интернета”

Юрий Лифшиц

ПОМИ РАН - СПбГУ ИТМО

Осень 2006

# Рекорд

Книга 1995 года “The Nature of Statistical Learning Theory” Владимира Вапника цитируется более **6400** раз

*Статистика Google Scholar*

# План лекции

1. Оптимальная разделяющая гиперплоскость
   - Случай линейной разделимости
   - Шумы и штрафы

# План лекции

1. Оптимальная разделяющая гиперплоскость
   - Случай линейной разделимости
   - Шумы и штрафы
2. Обучение машины опорных векторов
   - Постановка задачи квадратичной оптимизации
   - Метод последовательных мини-оптимизаций

# План лекции

1. Оптимальная разделяющая гиперплоскость
   - Случай линейной разделимости
   - Шумы и штрафы
2. Обучение машины опорных векторов
   - Постановка задачи квадратичной оптимизации
   - Метод последовательных мини-оптимизаций
3. Расширение пространства признаков

# Часть I

Формальная постановка задачи классификации

Как выбрать лучший линейный классификатор?

Как определить уровень ошибки линейного классификатора?

## Абстрактная задача классификации

**Объекты:** вектора $n$-мерного пространства
Каждая **координата** соответствует признаку
**Категории:** сегодня рассматриваем только бинарную классификацию (две категории)

# Абстрактная задача классификации

**Объекты:** вектора $n$-мерного пространства
Каждая **координата** соответствует признаку
**Категории:** сегодня рассматриваем только бинарную классификацию (две категории)

**Учебная коллекция:** даны документы (вектора) $x_1, \ldots, x_n$ и их принадлежность к двум классам $y_1, \ldots, y_n \in \{1, -1\}$

# Абстрактная задача классификации

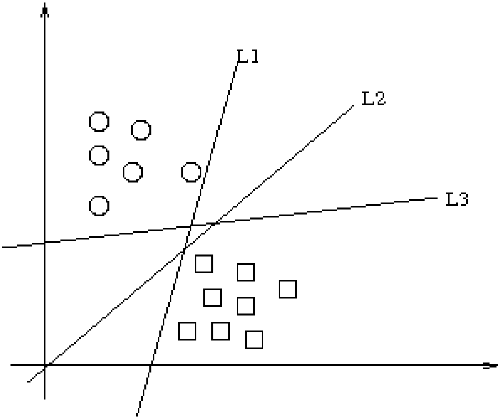
**Объекты:** вектора $n$-мерного пространства
Каждая **координата** соответствует признаку
**Категории:** сегодня рассматриваем только бинарную классификацию (две категории)

**Учебная коллекция:** даны документы (вектора) $x_1, \ldots, x_n$ и их принадлежность к двум классам $y_1, \ldots, y_n \in \{1, -1\}$

Цель ученых: построить по учебной коллекции **оптимальное** классифицирующее правило **заданного** вида.

# Линейный классификатор (1/3)

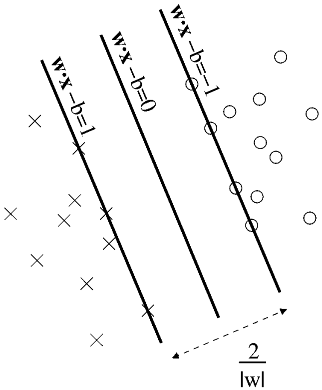
$w \cdot x_i > b \Rightarrow y_i = 1$
$w \cdot x_i < b \Rightarrow y_i = -1$



## Разделение полосой:

$w \cdot x_i \geq b + \varepsilon \Rightarrow y_i = 1$

$w \cdot x_i \leq b - \varepsilon \Rightarrow y_i = -1$



# Линейный классификатор (3/3)

Домножив $w$ на $\frac{1}{\varepsilon}$, можем считать $\varepsilon = 1$:

$w \cdot x_i - b \geq 1 \Rightarrow y_i = 1$

$w \cdot x_i - b \leq -1 \Rightarrow y_i = -1$

# Линейный классификатор (3/3)

Домножив $w$ на $\frac{1}{\varepsilon}$, можем считать $\varepsilon = 1$:

$w \cdot x_i - b \geq 1 \Rightarrow y_i = 1$

$w \cdot x_i - b \leq -1 \Rightarrow y_i = -1$

Как выбрать наилучшую разделяющую полосу?

# Линейный классификатор (3/3)

Домножив $w$ на $\frac{1}{\varepsilon}$, можем считать $\varepsilon = 1$:

$w \cdot x_i - b \geq 1 \Rightarrow y_i = 1$

$w \cdot x_i - b \leq -1 \Rightarrow y_i = -1$

Как выбрать наилучшую разделяющую полосу?

Выберем самую **широкую**

Факт: ширина полосы равна $\frac{2}{\|w\|}$

## Формализация

Переформулировка поиска оптимальной разделяющей полосы в виде задачи **квадратичной оптимизации**:

**При ограничениях**

$$y_i(w \cdot x_i - b) \geq 1$$

**минимизировать**

$$\|w\|^2 = w \cdot w$$

# Шумы и штрафы

Как определить оптимальную полосу, когда категории нельзя разделить строго?

# Шумы и штрафы

Как определить оптимальную полосу, когда категории нельзя разделить строго?

Нужно определить штраф за неправильную классификацию учебных документов и минимизировать сумму $\|w\|^2$ и всех штрафов:

**При ограничениях**

$$y_i(w \cdot x_i - b) \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0$$

**минимизировать**

$$\|w\|^2 + C \sum \xi_i$$

# Часть II

Как решить задачу оптимизации?

Можно ли найти оптимальную гиперплоскость, не зная самих векторов, а только скалярные произведения между ними?

# Множители Лагранжа (1/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$

# Множители Лагранжа (1/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$
- Взять все производные по старым переменным (координатам $x$) и приравнять их к нулю

## Множители Лагранжа (1/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$
- Взять все производные по старым переменным (координатам $x$) и приравнять их к нулю
- С помощью получившихся уравнений выразить $x$ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

# Множители Лагранжа (1/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$
- Взять все производные по старым переменным (координатам $x$) и приравнять их к нулю
- С помощью получившихся уравнений выразить $x$ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$
- Подставить получившуюся формулу для $x$ в $k$ ограничений-равенств и решить эти $k$ уравнений с $k$ неизвестными

# Множители Лагранжа (2/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-**не**равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i \geq 0$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$

# Множители Лагранжа (2/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-**не**равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i \geq 0$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$
- Взять все производные по старым переменным (координатам $x$) и приравнять их к нулю

# Множители Лагранжа (2/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-**не**равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i \geq 0$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$
- Взять все производные по старым переменным (координатам $x$) и приравнять их к нулю
- С помощью получившихся уравнений выразить $x$ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

# Множители Лагранжа (2/2)

Метод Лагранжа для нахождения минимума целевой функции при нескольких условиях-**не**равенствах:

- Ввести дополнительные переменные (множители Лагранжа) $\lambda_i \geq 0$ и составить новую целевую функцию $F - \sum \lambda_i G_i$
- Взять все производные по старым переменным (координатам $x$) и приравнять их к нулю
- С помощью получившихся уравнений выразить $x$ через $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
- Для каждого ограничения-неравенства верно одно из двух: (1) или в том условии выполняется строгое равенство, или (2) соответствующий множитель $\lambda_i$ равен нулю. Получается $k$ "или-уравнений" для $k$ переменных

# Применим метод Лагранжа (1/3)

**Исходная задача:** при ограничениях

$$y_i(w \cdot x_i - b) \geq 1 - \xi_i$$

минимизировать

$$w \cdot w + C \sum \xi_i$$

# Применим метод Лагранжа (1/3)

**Исходная задача:** при ограничениях

$$y_i(w \cdot x_i - b) \geq 1 - \xi_i$$

минимизировать

$$w \cdot w + C \sum \xi_i$$

По методу Лагранжа, нам нужен минимум по $w, b, \xi_i$ и максимум по $\lambda_i$ новой целевой функции

$$w \cdot w + C \sum \xi_i - \sum \lambda_i(\xi_i + y_i(w \cdot x_i - b) - 1)$$

при условиях

$$\xi_i \geq 0, \lambda_i \geq 0$$

# Применим метод Лагранжа (2/3)

Вектор $w$ выражается через множители Лагранжа:

$$w = \sum \lambda_i y_i x_i$$

Уравнение разделяющей гиперплоскости:

$$\sum \lambda_i y_i x \cdot x_i + b = 0$$

# Применим метод Лагранжа (2/3)

Вектор $w$ выражается через множители Лагранжа:

$$w = \sum \lambda_i y_i x_i$$

Уравнение разделяющей гиперплоскости:

$$\sum \lambda_i y_i x \cdot x_i + b = 0$$

Постойте, а как найти $b$?

# Применим метод Лагранжа (3/3)

Решению исходной задачи оптимизации соответствуют такие значения множителей, при которых достигается максимум

$$\sum \lambda_i - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i \cdot x_j)$$

при условиях

$$\sum \lambda_i y_i = 0, \qquad 0 \leq \lambda_i \leq C$$

# Преимущества новой задачи

Новая (двойственная) задача: максимизировать

$$\sum \lambda_i - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i \cdot x_j)$$

при условиях

$$\sum \lambda_i y_i = 0, \qquad 0 \leq \lambda_i \leq C$$

**Важные свойства:**

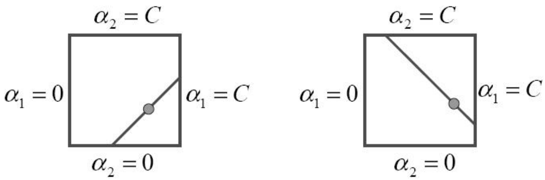
Целевая функция зависит не от самих $x_i$,
а от скалярных произведений между ними

Только пограничные и “заграничные” учебные
влияют на итоговое правило

# Как решать двойственную задачу

Алгоритм Джона Платта (Microsoft Research):

1. Начать с набора $\lambda_i$ удовлетворяющего ограничением
2. Выбрать (используются хитрые эвристики) пару $\lambda_i, \lambda_j$
3. При фиксированных значениях остальных множителей и имеющихся ограничениях $y_i\lambda_i + y_j\lambda_j = y_i\lambda_i^{old} + y_j\lambda_j^{old}$ и $0 \le \lambda_i, \lambda_j \le C$ выбрать оптимальную пару значений (**мини-оптимизация**)
4. Продолжать процесс до наступления стоп-условий



# Часть III

Как применить разработанную технику к поиску оптимального разделяющего **эллипса**?

Обобщение метода оптимальной полосы на произвольные поверхности, заданные полиномиальными уравнениями

# Идея расширенного пространства

Машина опорных векторов:

- Выбираем отображение векторов в **расширенное пространство** $x \to \phi(x)$
- Автоматически получается новая функция скалярного произведения $K(x, y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$
- Находим линейный разделитель $w, b$ в расширенном пространстве
- Получается классифицирующая поверхность $w \cdot \phi(x) - b$ в исходном пространстве

# Два примера

$$\phi(x) = \phi((x_1, x_2)) \rightarrow (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$$

$$K(x, y) = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 = (x \cdot y)^2$$

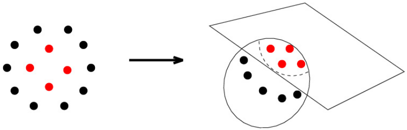
# Два примера

$$\phi(x) = \phi((x_1, x_2)) \rightarrow (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$$

$$K(x, y) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 = (x \cdot y)^2$$

$$\phi(x) = (1, c_{10\ldots0}x_1, \ldots, c_{110\ldots0}x_1x_2, \ldots, c_{0\ldots0d}x_k^d)$$

$$K(x, y) = (1 + x \cdot y)^d$$



# Полиномиальные разделители

Второй пример:
$\phi(x) = (1, c_{10\ldots0}x_1, \ldots, c_{110\ldots0}x_1x_2, \ldots, c_{0\ldots0d}x_k^d)$
$K(x, y) = (1 + x \cdot y)^d$

Разделяющая гиперплоскость $w \cdot \phi(x) - b$ — это полином степени не выше $d$. То есть мы ищем

**оптимальную полиномиальную разделяющую поверхность**!

Преимущества:

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы
+ При различных выборах ядер можно эмулировать другие подходы

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы
+ При различных выборах ядер можно эмулировать другие подходы
+ Теоретическое обоснование

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы
+ При различных выборах ядер можно эмулировать другие подходы
+ Теоретическое обоснование

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы
+ При различных выборах ядер можно эмулировать другие подходы
+ Теоретическое обоснование

Недостатки:

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы
+ При различных выборах ядер можно эмулировать другие подходы
+ Теоретическое обоснование

Недостатки:

- Мало параметров для настройки

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы
+ При различных выборах ядер можно эмулировать другие подходы
+ Теоретическое обоснование

Недостатки:

- Мало параметров для настройки
- Как выбирать ядро?

# Анализ метода SVM

Преимущества:

+ На тестах превосходит другие методы
+ При различных выборах ядер можно эмулировать другие подходы
+ Теоретическое обоснование

Недостатки:

- Мало параметров для настройки
- Как выбирать ядро?
- Медленное обучение

# Задача

Докажите, что гиперплоскость с максимальной шириной разделяющей полосы единственна

# Главные моменты

**Сегодня мы узнали:**

- Метод опорных векторов сводит обучение классификатора к задаче квадратичной оптимизации

# Главные моменты

## Сегодня мы узнали:

- Метод опорных векторов сводит обучение классификатора к задаче квадратичной оптимизации
- Задача квадратичной оптимизации решается эвристическими алгоритмами путем последовательного уменьшения целевой функции

**Сегодня мы узнали:**

- Метод опорных векторов сводит обучение классификатора к задаче квадратичной оптимизации
- Задача квадратичной оптимизации решается эвристическими алгоритмами путем последовательного уменьшения целевой функции
- Для построения нелинейных классификаторов используется отображение исходных объектов в расширенное пространство признаков

# Главные моменты

## Сегодня мы узнали:

- Метод опорных векторов сводит обучение классификатора к задаче квадратичной оптимизации
- Задача квадратичной оптимизации решается эвристическими алгоритмами путем последовательного уменьшения целевой функции
- Для построения нелинейных классификаторов используется отображение исходных объектов в расширенное пространство признаков

**Сегодня мы узнали:**

- Метод опорных векторов сводит обучение классификатора к задаче квадратичной оптимизации
- Задача квадратичной оптимизации решается эвристическими алгоритмами путем последовательного уменьшения целевой функции
- Для построения нелинейных классификаторов используется отображение исходных объектов в расширенное пространство признаков

Вопросы?

# Источники

**Страница курса** http://logic.pdmi.ras.ru/~yura/internet.html

Использованные материалы:


- Wikipedia
  Support Vector machine
  http://en.wikipedia.org/wiki/Support_vector_machine
- CJC Burges
  A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition
  http://www.music.mcgill.ca/~rfergu/adamTex/references/Burges98.pdf
- Константин Воронцов
  Лекция по методу опорных векторов
  http://www.ccas.ru/voron/download/SVM.pdf
- John Platt
  Sequential Minimal Optimization
  http://research.microsoft.com/users/jplatt/smo.html